

Chapitre 12 : Les modèles démographiques

- Calculer l'effectif final d'une population à partir de son effectif initial, de son taux de natalité et de son taux de mortalité
- Pour une suite arithmétique ou géométrique, exprimer $u(n)$ en fonction de $u(0)$ et de n
- Calculer le taux de variation d'une population entre deux dates
- Produire et interpréter des graphiques statistiques, notamment sous forme de nuage de points
- A l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, ajuster un nuage de points de manière linéaire ou exponentielle
- Effectuer des prévisions à l'aide d'un modèle linéaire ou exponentiel
- Comparer les valeurs fournies par un modèle à des données réelles afin de tester sa validité



I. Modélisation des effectifs des populations

La mesure de l'effectif d'une population donne un nombre fini de mesures sur une certaine durée : la population est une grandeur discrète.

L'évolution d'une population peut être modélisée :

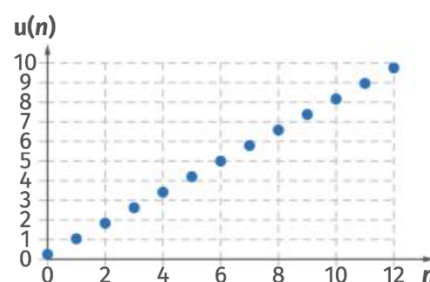
- Par une suite arithmétique pour une variation absolue constante ;
- Par une suite géométrique pour un taux d'accroissement constant.

II. Suite arithmétique/modèle linéaire

1) Définition (par récurrence)

Une suite est arithmétique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en **ajoutant** toujours le même nombre, appelé raison de la suite. Autrement dit, pour tout entier naturel n : $u(n+1) = u(n) + r$, avec r la raison de la suite.

De manière générale, le terme de rang p est appelé valeur de $u(p)$.



► Nuages de points d'une suite arithmétique de raison $r > 0$.



2) Propriété (définition explicite)

Instant maths

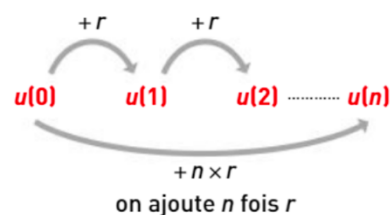
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels (entiers supérieurs ou égaux à zéro).
Le symbole $\in$ signifie « appartenant à »

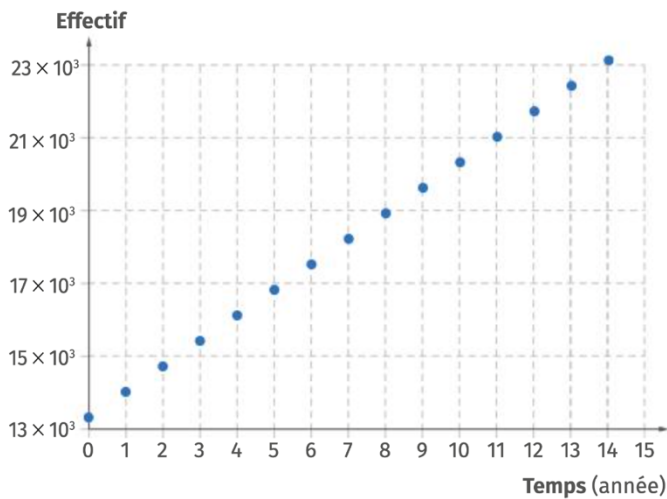
Etant donné une suite arithmétique u de raison r et de premier terme $u(0)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u(n) = u(0) + n \cdot r$$

Cas général : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u(n) = u(p) + (n - p) \cdot r$

Exemple, $n = 8$, $p = 1$: $u(8) = u(1) + (8 - 1) \cdot r = u(1) + 7r$





► Représentation des premiers termes d'une suite arithmétique.

Suite arithmétique

Évolution d'une population ou d'une ressource de variation **absolue** quasi constante.

Une population de 133 300 individus à l'année de référence 0 croît d'environ 7 004 individus par an. Son évolution est représentée par le nuage de points ci-contre. Les points sont presque alignés.

La population de l'année n s'estime par une suite arithmétique de premier terme 133 300 et de raison 7 004.

Par exemple, la population de l'année 15 est estimée par le calcul :

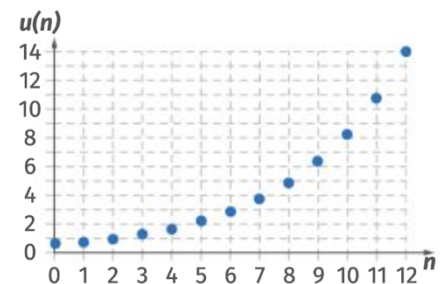
$$7\,004 \times 15 + 133\,300 = 238\,360.$$

III. Suite géométrique/modèle exponentiel

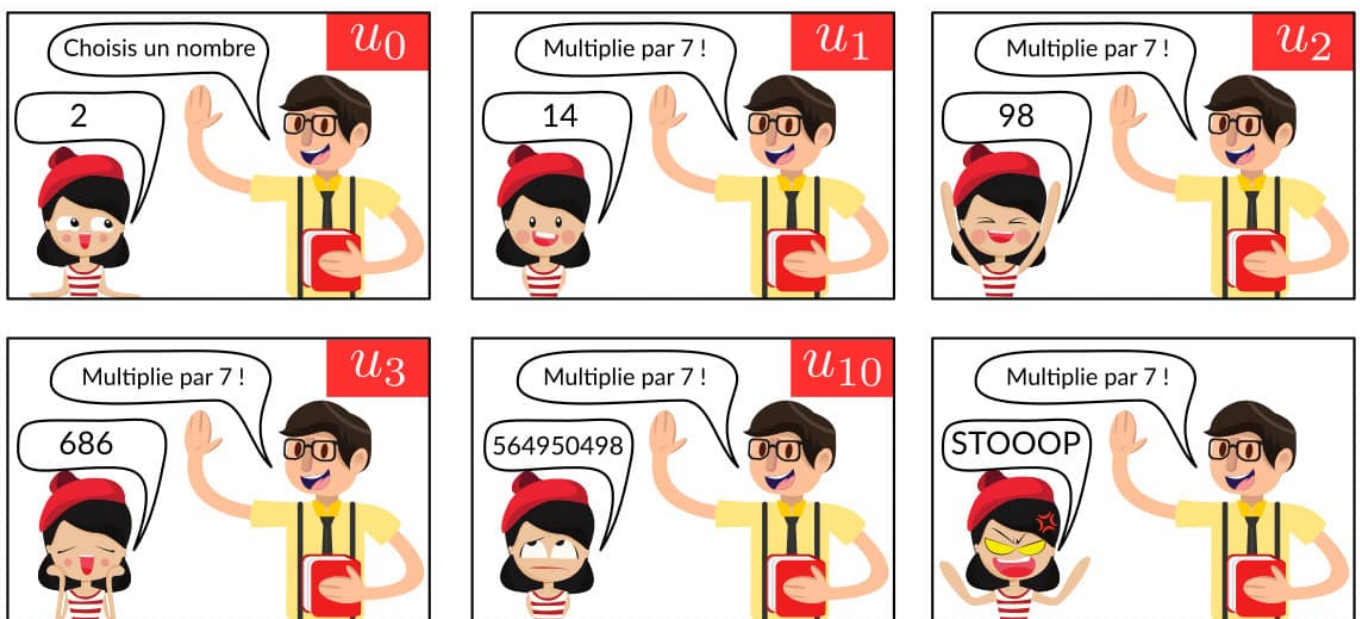
1) Définition (par récurrence)

Une suite est géométrique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en **multipliant** toujours par le même nombre, appelé raison de la suite. Autrement dit, pour tout entier naturel n : $u(n+1) = u(n) \cdot q$, avec comme premier terme $u(0)$.

Les suites géométriques modélisent des phénomènes de variations relatives constantes, c'est-à-dire les modèles exponentiels.



► Nuages de points d'une suite géométrique ($q > 1$).



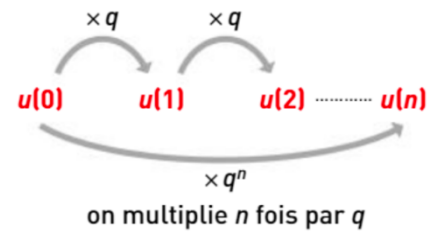
2) Propriété (définition explicite)

Etant donné une suite arithmétique u de raison q et de premier terme $u(0)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u(n) = u(0) \cdot q^n$$

Cas général : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u(n) = u(p) \cdot q^{n-p}$

Exemple, $n = 11$, $p = 1$: $u(11) = u(1) \cdot q^{11-1} = u(1) \cdot q^{10}$



3) Modèle démographique de Malthus

En 1798, Thomas Malthus (1766-1834) publie son *Essai sur le principe de population* dans lequel il expose son idée selon laquelle la population croît beaucoup plus rapidement que les ressources. Il utilisait le modèle géométrique pour prévoir l'évolution de la population à partir du taux d'accroissement, qui est la différence entre le **taux de natalité** et le **taux**

de mortalité. Son modèle est valide sur des temps courts mais irréaliste sur des temps longs, en raison de l'insuffisance des ressources.

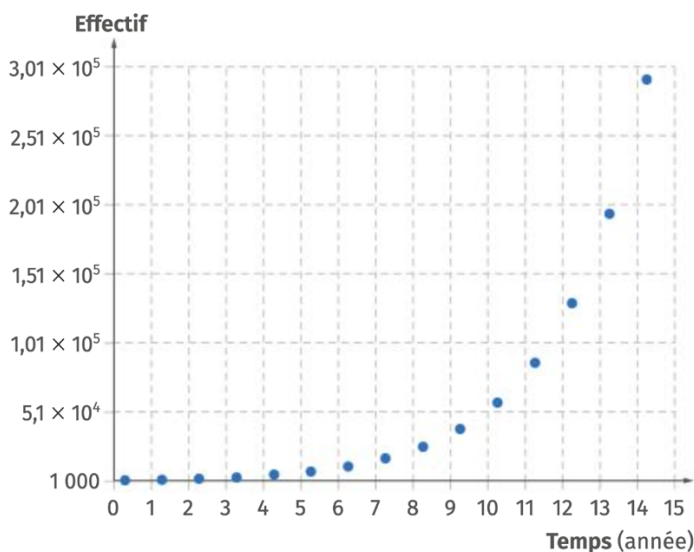


Vocabulaire

Taux de mortalité : rapport entre le nombre de morts et l'effectif d'une population pour une certaine durée.

Taux de natalité : rapport entre le nombre de naissances et l'effectif d'une population pour une certaine durée.

Aujourd'hui, on prévoit que la population mondiale sera d'environ 9,7 milliards d'habitants à l'horizon 2050 !



► Représentation des premiers termes d'une suite géométrique.

Suite géométrique

Évolution d'une population ou d'une ressource de variation **relative** quasi constante.

Une population de 1000 individus à l'année de référence 0 est multipliée par environ 1,5 par an. Son évolution est représentée par le nuage de points ci-contre. Les points ne sont pas alignés, mais l'écart s'agrandit de plus en plus.

La population de l'année n s'estime par une suite géométrique de premier terme 1000 et de raison 1,5.

Par exemple, la population de l'année $n = 15$ est estimée par le calcul $1000 \times 1,5^{15} \approx 437894$.