

# Mesure d'une longueur par triangulation plane

TÂCHE COMPLEXE

En 1792, Jean-Baptiste Delambre (1749-1822) et Pierre Méchain (1744-1804), astronomes et mathématiciens français, sont mandatés par l'Académie des sciences pour établir un système de mesures universel valable qui n'ait plus pour modèle l'homme - on mesurait alors en pouce, en pieds, en coudées... - mais le patrimoine commun de l'humanité: la Terre.

MISSION

En retraçant les pas de Jean-Baptiste Delambre et Pierre Méchain, grâce à la méthode de triangulation plane, déterminez la valeur de la distance Melun-Malvoisine.

POUR ALLER LOIN

- p. 184: Mesurer la méridienne, une mission entre prouesses et péripéties.
- p. 186: Histoire de la définition du mètre.

## 1 Établir une stratégie pour mesurer le mètre

### L'aventure de a. Delambre et Méchain

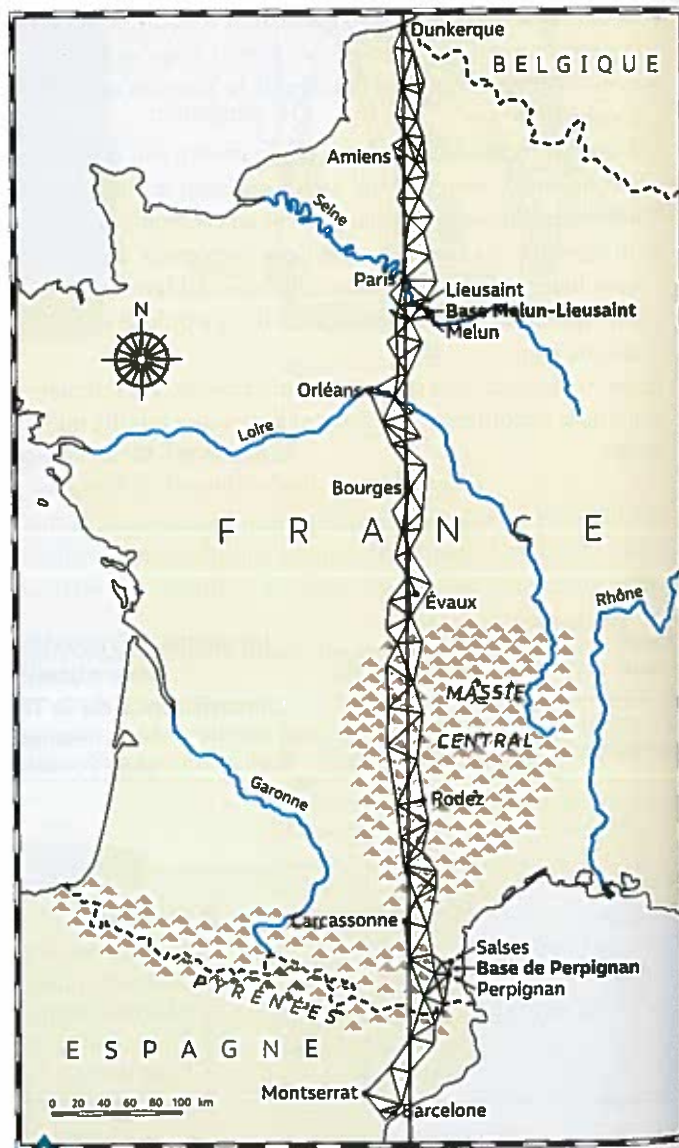
Lire l'article en ligne



Jean-Baptiste Delambre, Pierre Méchain et leurs collaborateurs devaient définir la longueur du mètre, fixée selon les scientifiques de l'Académie des sciences à «la dix millionième partie du quart du méridien terrestre». Ils se lancent pour cela dans la mesure du méridien de Paris: une ligne née dans l'imagination des cartographes, qui traverse la France de part en part (de Dunkerque à Barcelone) pour rejoindre les deux pôles du globe. Les deux tiers supérieurs, de Dunkerque à Rodez, incombent à Jean-Baptiste Delambre, et le parcours Rodez-Barcelone à Pierre Méchain. Aucun monument ne commémore les efforts déployés pour mener à bien cette mission, en pleine Terreur (au moment de la Révolution française)...

Les chercheurs utilisent une méthode mathématique appelée «triangulation». Elle consiste à diviser le terrain en triangles pour le mesurer. On trace d'abord le long du méridien des triangles jointifs, ayant chacun un côté en commun avec le suivant. Il suffit ensuite de mesurer les angles des triangles par visée, depuis un endroit situé en hauteur (clocher, château, tour) et de disposer de la longueur d'une seule base (celle de Melun-Lieusaint pour la partie nord) pour pouvoir en déduire tous les côtés des triangles dont la somme était précisément la portion de méridien.

D'après Azar Khalatbari, «Le mètre et le méridien», www.libération.fr, 2006.



b. Chaîne des triangles de Dunkerque à Barcelone

## 2 Définir une première base pour la méthode

### c. La base Melun-Lieusaint

Lire l'article en ligne

On peut effectuer une triangulation à partir de la connaissance de la longueur d'une première base de 6 075,90 toises entre Melun et Lieusaint, deux villes situées en Seine-et-Marne (77). Ainsi, à partir des extrémités de cette base, Jean-Baptiste Delambre vise Malvoisine. De la mesure des angles, il déduit la distance Lieusaint-Malvoisine et celle-ci constitue la base d'un nouveau triangle dont le sommet sera Monthéry. Une chaîne de triangles successifs juxtaposés est ainsi formée le long de la méridienne. L'arc de méridien Dunkerque-Barcelone a pour longueur un quart de méridien terrestre.

D'après «Un voyage... de Dunkerque à Barcelone», www.clea-astro.eu.

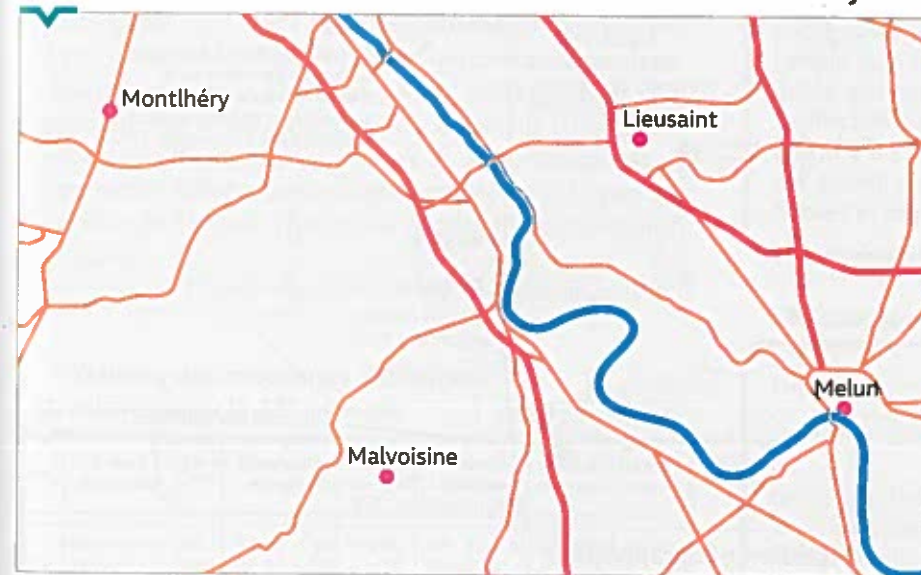
### d. Mesures effectuées par Delambre

Consulter les relevés originaux

Angle au sommet «Melun»	Angle au sommet «Lieusaint»	Angle au sommet «Malvoisine»
63°43'34"	75°39'29"	40°36'57"

### Les triangles

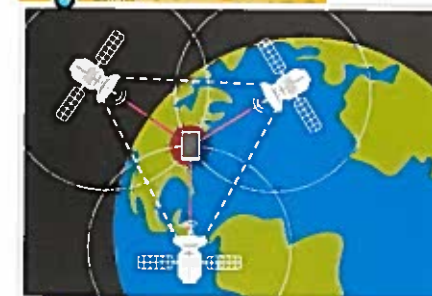
#### e. Lieusaint-Melun-Malvoisine et Lieusaint-Malvoisine-Monthéry



### COUPS DE POUCE

- Réalisez le schéma du triangle Melun, Lieusaint et Malvoisine. Placez les trois angles au sommet indiqués dans les données.
- Écrivez la loi des sinus appliquée au triangle représenté dans la question précédente.
- Déterminez la valeur de la distance Melun-Malvoisine.
- Jean-Baptiste Delambre a obtenu une longueur de 10 000 km pour l'arc de méridien Dunkerque Barcelone. En déduire la longueur du méridien puis une estimation du rayon terrestre.

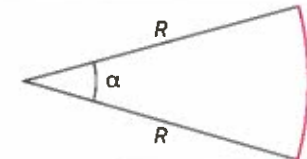
### LE SAVIEZ-VOUS ?



La triangulation est une des plus anciennes techniques humaines pour construire ou se repérer. Elle a servi dans la construction des pyramides ou la cartographie mondiale et elle permet actuellement l'utilisation du GPS, le calcul de sollicitation, la représentation 3D, dans les jeux, et même en politique ou psychologie. Elle se base sur un constat en géométrie plane: si l'on modifie une grandeur d'un triangle (l'un des trois côtés ou l'un des trois angles), on modifiera aussi d'autres grandeurs du triangle. Ceci sous-entend que les grandeurs du triangle sont liées entre elles.

### DONNÉES

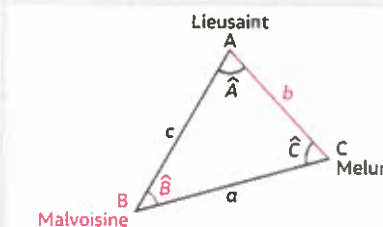
La longueur  $L$  d'un arc de cercle est proportionnelle à l'angle  $\alpha$  qui l'intercepte:  $L = R \times \alpha$  avec  $R$  le rayon du cercle et  $\alpha$  l'angle correspondant en radian (rad).



Dans le triangle ABC, les longueurs des côtés et les angles au sommet vérifient la relation:

$$\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$$

avec  $\sin(\hat{A})$ ,  $\sin(\hat{B})$ ,  $\sin(\hat{C})$  non nuls.



**Toise:** unité de longueur ancienne, correspondant à six pieds:  
 1 toise = 1,949 m.  
 1 minute d'arc (notée 1') correspond à  $\frac{1^\circ}{60}$ .  
 1 seconde d'arc (notée 1'') correspond à  $\frac{1'}{60}$  et donc à  $\frac{1^\circ}{3600}$ .